۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

پله‌ی اول: یادآوری مجموعه‌های مهم و اعمال روی آن‌ها

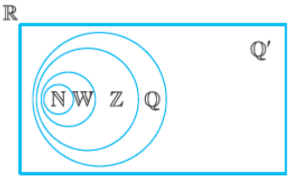
در سال گذشته با مفهوم مجموعه‌ها آشنا شدیم. دانستیم که مجموعه، دسته‌ای از اشیای کاملاً معین است. اگر شئ a، متعلق به مجموعه‌ی A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر متعلق به A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$. مجموعه‌ی A را زیرمجموعه‌ی B گوییم، هرگاه همه‌ی عضوهای A متعلق به B هم باشند و می‌نویسیم $A \subseteq B$. مجموعه‌های مهم را دوباره یادآوری می‌کنیم:

$\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,۴,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی
$\mathbb{W} = \{۰,۱,۲,۳,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$: مجموعه‌ی اعداد صحیح
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\}$: مجموعه‌ی اعداد گویا (کسرها)

همه‌ی اعداد مجموعه‌های بالا، مکان مشخصی روی محور دارند. ثابت می‌شود اعدادی روی محور وجود دارند که گویا نیستند. به عبارت دیگر نمی‌توان آن‌ها را به صورت یک کسر با صورت و مخرج صحیح و مخرج ناصفر نوشت. $\sqrt{۲}$ یکی از آن‌هاست. چنین اعدادی روی محور را اعداد گنگ می‌نامیم و با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی اعداد حقیقی، اجتماع اعداد گویا و گنگ هستند. هر نقطه روی محور، نمایش یک عدد حقیقی است. برای همین، محور اعداد را محور اعداد حقیقی می‌نامیم. به زبان ریاضی $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ (اعداد حقیقی). ارتباط این مجموعه‌ها به صورت $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ است.

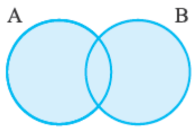
نمایش نمودار ون آن‌ها نیز به صورت مقابل خواهد بود:



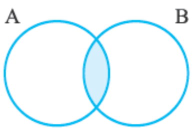
($\mathbb{Q}'$ بیرون مجموعه‌ی $\mathbb{Q}$ است.)

یادآوری **یادآوری اعمال روی مجموعه‌ها**

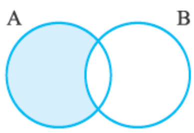
اجتماع دو مجموعه، دو مجموعه‌ی B و A را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی اعضایی که در A یا در B یا در هر دو هستند *(به «یا» دقت کن)* را اجتماع دو مجموعه گفته و با نماد $A \cup B$ نمایش می‌دهیم. برای به دست آوردن اجتماع دو مجموعه، همه‌ی عضوهای A یا B را می‌نویسیم. در اجتماع دو مجموعه، عضوهای تکراری را یک بار می‌نویسیم. نمایش نمودار ون $A \cup B$ به صورت مقابل است.



اشتراک دو مجموعه، مجموعه‌ی عضوهای مشترک دو مجموعه‌ی B و A را اشتراک دو مجموعه گفته و با نماد $A \cap B$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر $A \cap B$ شامل عضوهایی است که عضو هر دوی A و B *(به «و» دقت کن)* هستند. نمایش نمودار ون اشتراک دو مجموعه، به صورت مقابل است.



تفاضل دو مجموعه، مجموعه‌ی اشیایی که عضو A هستند ولی عضو B نیستند را مجموعه‌ی $A - B$ می‌نامیم. $A - B$ شامل اشیایی است که فقط عضو A هستند. برای به دست آوردن $A - B$، کافی است عضوهایی از A که در B هستند را حذف کنیم. نمایش نمودار ون $A - B$ به صورت مقابل است.



مثال و پاسخ

مثال اگر $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{-1,0,2,7\}$ باشد، مجموعه‌های $A\cup B$ ، $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ را به دست آورید.

پاسخ
$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}\cup\{-1,0,2,7\}=\{1,2,3,4,5,-1,0,7\}$

$A\cap B=\{1,2,3,4,5\}\cap\{-1,0,2,7\}=\{2\}$

$A-B=\{1,\cancel{2},3,4,5\}-\{-1,0,2,7\}=\{1,3,4,5\}$ *(عدد ۲ در B هم هست، پس آن را از A حذف کردیم.)*

$B-A=\{-1,0,\cancel{2},7\}-\{1,2,3,4,5\}=\{-1,0,7\}$

مثال با توجه به نمودار ون در پله‌ی اول، حاصل هر قسمت را به دست آورید.

پاسخ
الف $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\Rightarrow \mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\,,\ \mathbb{N}\cap\mathbb{Z}=\mathbb{N}\,,\ \mathbb{N}-\mathbb{Z}=\varnothing\,,\ \mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{0,-1,-2,\dots\}$

ب $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\Rightarrow \mathbb{Q}\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}\,,\ \mathbb{Q}\cap\mathbb{R}=\mathbb{Q}\,,\ \mathbb{Q}-\mathbb{R}=\varnothing\,,\ \mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$

(واضحه که اگه $A\subseteq B$ باشه، $A-B=\varnothing\,,A\cap B=A\,,\ A\cup B=B$ میشه)

پله‌ی دوم: بازه‌ها

مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی بین ۱ و ۰ (مثلاً $\dots,\frac{\sqrt{2}}{2}\,,0/5\,,0/1$) را در نظر بگیرید. نمایش مجموعه‌ای این اعداد به صورت $\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$ خواهد بود. این مجموعه را به صورت ساده‌تر $(0,1)$ نمایش داده *(با نقطه‌ی (۰,۱) روی دستگاه اشتباه نگیری!)* و آن را بازه‌ی صفر و یک می‌نامیم. چون خود ۱ و ۰ عضو مجموعه نیستند، بازه را بازه‌ی باز می‌نامیم. اگر عدد ۱ عضو بازه باشد، آن را به صورت $(0,1]$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی منظور از (a,b) مجموعه‌ی اعداد حقیقی از a تا b (بین a,b) روی محور می‌باشد و خود b و a عضو بازه نیستند.

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
a b	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	(a,b)	باز
a b	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$	$[a,b]$	بسته
a b	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$	$(a,b]$	نیم‌باز
a b	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	$[a,b)$	نیم‌باز

ممکن است همه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a مدنظر باشند، در این صورت نمایش مجموعه‌ای آن به صورت $\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$ بوده و بازه‌ی نظیر آن را به صورت $(a,+\infty)$ نمایش می‌دهیم. $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) عدد نیست، بلکه نشان می‌دهد بازه از راست بی‌کران است. در حالت کلی داریم:

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$	$(a,+\infty)$	باز و از راست بی‌کران
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز و از راست بی‌کران
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$	$(-\infty,a)$	باز و از چپ بی‌کران
a	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$	$(-\infty,a]$	نیم‌باز و از چپ بی‌کران
	$\mathbb{R}$	$(-\infty,+\infty)$	باز و از دو طرف بی‌کران

(توجه کن $+\infty$ یا $-\infty$ همیشه باز هستن و اگه یه طرف پرانتز باشه، می‌گیم نیم‌باز. تو بازه‌ی (a,b) همیشه $a<b$ هستش)

مثال و پاسخ

مثال درستی یا نادرستی هر عبارت را بررسی کنید.

الف $0\in(-1,2)$ درست است، چون صفر بین -1 و ۲ قرار دارد. هم‌چنین $-0/2\in(-1,2)$ یا $\sqrt{2}\in(-1,2)$. توجه دارید که $[0,1]\neq(-1,2)$.

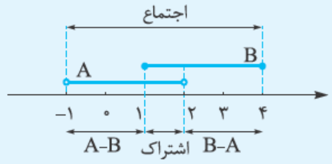
ب $1\in(1,5]$ درست نیست، چون بازه در سمت چپ باز بوده و عدد ۱ عضو بازه نیست.

پ $7\in(-1,7]$ درست است، چون سمت راست بازه، بسته است اما $-1\in(-1,7]$ درست نیست. در نمایش این بازه روی محور، -1 توخالی است.

مثال و پاسخ

مثال **بازه‌های $A=(-۱,۲)$ و $B=[۱,۴]$ را روی محور رسم کرده، اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را به صورت بازه بنویسید.**

پاسخ



$A\cup B=(-۱,۴]$

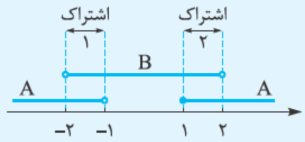
$A\cap B=[۱,۲)$

(اعدادی که فقط در A هستند) $A-B=(-۱,۱)$ (توجه دارید که $۱\in A$ و $۱\in B$، پس $۱\notin A-B$ و لذا بازه از چپ باز خواهد بود.)

(اعدادی که فقط در B هستند) $B-A=[۲,۴]$ (توجه دارید که $۲\in B$ ولی $۲\notin A$، پس $۲\in B-A$ بوده و بازه از چپ بسته می‌شود.)

مثال **مجموعه‌ی $A=(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$ را روی محور رسم کرده و اشتراک آن را با بازه‌ی $B=(-۲,۲)$ به دست آورید.**

پاسخ نمایش مجموعه‌های A و B روی محور به صورت مقابل است.



این دو مجموعه در دو قسمت اشتراک دارند، بنابراین اشتراک آن‌ها را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت. داریم:

$$A\cap B=\underbrace{(-۲,-۱)}_{\text{قسمت (۱)}}\cup\underbrace{[۱,۲)}_{\text{قسمت (۲)}}$$

مورد داشتیم پرسیده آقا مگه اشتراک نبود، چرا بین اون‌ها اجتماع شد؟

ببین B و A در کدام قسمت‌ها اشتراک دارند؟ در دو بازه که هر دوی اون‌ها هم قبوله، یعنی همه‌شون جزء جواب باید باشن، پس قسمت (۱) اجتماع (به اضافه) قسمت (۲).

پله‌ی سوم: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ی $A=\{-۱,۲,۵\}$ را در نظر بگیرید. این مجموعه ۳ عضو دارد، پس $n(A)=۳$. مجموعه‌ی $B=\{۱,۲,۳,۴,...\}$ چه‌طور؟ واضح است که تعداد اعضای این مجموعه را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد. مجموعه‌ی A نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی متناهی (باپایان) و مجموعه‌ی B نمونه‌ای از یک مجموعه‌ی نامتناهی (بی‌پایان) است.

مجموعه‌ی متناهی، مجموعه‌هایی را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد، مجموعه‌های متناهی (باپایان) می‌نامیم. توجه دارید که ممکن است تعداد اعضای یک مجموعه، عدد حسابی بزرگی باشد اما باز هم مجموعه‌ی متناهی به حساب می‌آید.

هم‌چنین مجموعه‌ی $\varnothing$، صفر عضو دارد، پس $\varnothing$ هم یک مجموعه‌ی متناهی است. مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی می‌نامیم.

مثال و پاسخ

مثال **متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:**

مجموعه	متناهی یا نامتناهی
$A=$ مجموعه‌ی اعداد اول دورقمی	متناهی، چون $A=\{۱۱,۱۳,۱۷,...,۹۷\}$ بوده و تعداد عضوها، عدد حسابی است.
$B=$ مجموعه‌ی اعداد حسابی	نامتناهی، چون $B=\{۰,۱,۲,۳,...\}$ بوده و تعداد عضوها، یک عدد حسابی نیست.
$C=$ مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۳	نامتناهی، چون $C=\{۳,۶,۹,۱۲,...\}$ بوده و تعداد عضوها، یک عدد حسابی نیست.
$D=$ مجموعه‌ی اعداد بین صفر و یک	نامتناهی، چون $D=(۰,۱)$ و بی‌شمار عدد در این بازه وجود دارد.
$E=$ مجموعه‌ی مورچه‌های کره‌ی زمین در یک لحظه‌ی خاص	متناهی، چون تعداد آن‌ها بالاخره یک عدد حسابی است هر چند بسیار بزرگ خواهد بود.
$F=$ مجموعه‌ی اعداد گویا	نامتناهی، چون تعداد عددهای گویا، یک عدد حسابی نیست.
$G=$ مجموعه‌ی اعداد اعشاری بین $۰/۱$ و $۰/۲$	نامتناهی، چون بی‌شمار عدد اعشاری، بین هر دو عدد مختلف وجود دارد.

سؤال‌های امتحانی

۱- در جای خالی یکی از مجموعه‌های $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Q}'$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{N}$ ، $\varnothing$ را قرار دهید.

الف) $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\cdots$ ب) $\mathbb{W}\cap\mathbb{N}=\cdots$ پ) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\cdots$

ت) $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\cdots$ ث) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\cdots$ ج) $\mathbb{Z}-\mathbb{Q}=\cdots$

چ) $\mathbb{Z}-\mathbb{Q}'=\cdots$ ح) $\mathbb{Q}'-\mathbb{R}=\cdots$ خ) $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{R}=\cdots$

۲- درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $۳\in\{۰,۳\}$ ب) $-۱\in\{-۲,۰\}$ پ) $۳\in(۰,۳)$

ت) $-۱\in(-۲,۰)$ ث) $(-۱,۲)\subseteq[-۱,۲)$ ج) $\varnothing\in(-۵,۰]$

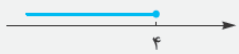
چ) $\varnothing\subseteq(۰,۱)$ ح) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}\notin[۰,۱]$ خ) $(۲,۳]=[۲,۳)$

۳- مشخص کنید هر عدد متعلق به کدام بازه است. (مانند نمونه)

نمونه -۳ $\sqrt{۸}$ $\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$ $۰/۰۷۵\times۱۰^{۱۰۰}$ $(-۱۰)^{-۲}$ $-۱۰^{۲۰}$

$[۱,۲)$ $(۰,۱)$ $(-۵,-۳]$ $(-\infty,-۱۰۰)$ $(\sqrt{۷},۳]$ $(۴,+\infty)$

۴- جدول زیر را کامل کنید.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
....	....	$(-۳,۲]$	....
....	$\{x\in\mathbb{R}\mid x>-۱\}$	....	....
 ۴	....	....	....

۵- در هر قسمت $A\cup B$ ، $A\cap B$ ، $A-B$ و $B-A$ را به دست آورده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید.

الف) $B=(۰,۵)\ ,\ A=[-۲,۱)$ ب) $B=[۱,+\infty)\ ,\ A=(-۲,۰)$

پ) $B=[-۱,۱]\ ,\ A=(-۲,۲)$ ت) $B=(۰,۱)\ ,\ A=[-۳,۱]$

۶- مجموعه‌های $\mathbb{R}-\{۰\}$ ، $\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$ و $\mathbb{R}-(-۱,۱)$ را روی محور نمایش داده و سپس آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

۷- متناهی یا نامتناهی بودن هر مجموعه را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۱۰۰   ب) مجموعه‌ی سلول‌های زنده‌ی بدن شما

پ) مجموعه‌ی همه‌ی دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات   ت) اعداد بازه‌ی $(-\frac{۱}{۱۰۰},\frac{۱}{۱۰۰})$

ث) اعداد گویای بین ۱ و ۲   ج) اعداد حسابی منفی

چ) مجموعه اعداد اول چهاررقمی   ح) مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مربع آن‌ها از ۱۰ بیشتر است.

خ) مجموعه اعداد اعشاری بین ۰/۲ و ۰/۵   د) مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰۰

۸- در هر قسمت دو مجموعه‌ی B و A مثال بزنید که شرایط خواسته‌شده را دارا باشد.

الف) B و A نامتناهی بوده ولی اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

ب) B و A نامتناهی بوده ولی $A-B$ متناهی و $B-A$ نامتناهی باشد.

۹- درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

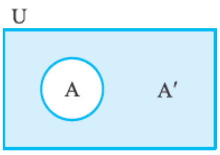
	درست	نادرست
الف) اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی، متناهی است.	○	○
ب) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.	○	○
پ) اگر $A \subseteq B$ بوده و B متناهی باشد، A هم متناهی است.	○	○
ت) اگر $A \subseteq B$ بوده و A نامتناهی باشد، B هم نامتناهی است.	○	○
ث) اگر $A - B$ نامتناهی باشد، A نامتناهی و B حتماً متناهی است.	○	○
ج) اگر $A - B$ متناهی باشد، B متناهی است.	○	○

۲ متمم یک مجموعه

پله‌ی اول: مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه

مدرسه‌ای سه کلاس در پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم دارد. به نظر شما مجموعه‌ی افرادی که عضو کلاس دهم این مدرسه نیستند، چه اعضایی دارند؟ ممکن است سریع بگویید دانش‌آموزان کلاس‌های یازدهم و دوازدهم این مدرسه. خب کادر اجرایی مدرسه چه‌طور؟ پدر و مادر هر یک از دانش‌آموزان چه‌طور؟ برای این‌که دچار ابهام نباشیم، ابتدا در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را تعریف می‌کنیم. به چنین مجموعه‌ای، مجموعه‌ی مرجع گفته می‌شود. مثلاً در همین مثال می‌توانیم مجموعه‌ی مرجع را، مجموعه‌ی دانش‌آموزان مدرسه در نظر بگیریم. حالا به راحتی افرادی که عضو کلاس دهم نیستند را مشخص می‌کنیم. واضح است که آن‌ها دانش‌آموزان پایه‌های یازدهم و دوازدهم مدرسه خواهند بود. این دانش‌آموزان، متممِ مجموعه‌ی دانش‌آموزان پایه‌ی دهم هستند.

مجموعه‌ی مرجع، در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع یا مجموعه‌ی جهانی می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی مرجع، معمولاً توسط خودِ مسئله مشخص می‌گردد.



متمم مجموعه‌ی A، فرض کنید U مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq U$ باشد. مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A'، شامل عضوهایی از مجموعه‌ی مرجع است که در A نیستند. (A' همان عضوهایی از مرجع است که در A نیستند.)

مثال و پاسخ

مثال **اگر $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $U = \mathbb{N}$ باشد، مجموعه‌ی A' را به دست آورید.**

پاسخ $A' = U - A = \mathbb{N} - A = \{۱,۲,۳,۴,۵,\dots\} - \{۱,۲,۳,۴\} = \{۵,۶,۷,\dots\}$

مثال **در مثال بالا، اگر $U = \mathbb{Z}$ باشد، مجموعه‌ی A' را به دست آورید.**

پاسخ $A' = U - A = \mathbb{Z} - A = \{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\} - \{۱,۲,۳,۴\} = \{\dots,-۲,-۱,۰,۵,۶,۷,\dots\}$

مثال **در مثال اول، اگر $U = \mathbb{R}$ باشد، مجموعه‌ی A' را به دست آورید.**

پاسخ از کل محور، اعداد ۱،۲،۳،۴ را حذف می‌کنیم.

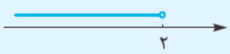
$$A' = U - A = \mathbb{R} - \{۱,۲,۳,۴\} = (-\infty,۱) \cup (۱,۲) \cup (۲,۳) \cup (۳,۴) \cup (۴,+\infty)$$

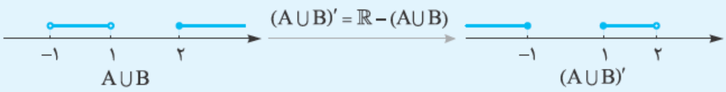
می‌بینید با این‌که در هر سه مثال، مجموعه‌ی A یکسان است ولی چون مجموعه‌های مرجع، در هر کدام متفاوت است، مجموعه‌های مختلفی برای A' به دست می‌آید. به همین دلیل است که وقتی صحبت از متممِ مجموعه می‌شود، حتماً باید مجموعه‌ی مرجع داده شده باشد.

مثال **فرض کنید $U = \mathbb{R}$ ، $A = (-۱,۱)$ و $B = [۲,+\infty)$ باشد. مجموعه‌های A' ، B' و $(A \cup B)'$ را به دست آورید.**

پاسخ $A' = U - A = \underbrace{\mathbb{R} - (-۱,۱)}_{\text{بازه‌ی } (-۱,۱) \text{ را از کل } \mathbb{R} \text{ برمی‌داریم}} = (-\infty,-۱] \cup [۱,+\infty)$

$B' = U - B = \mathbb{R} - [۲,+\infty) = (-\infty,۲)$





پله‌ی دوم: روابط بین متمم مجموعه‌ها

در حالت کلی روابط مهمی بین متمم‌های دو مجموعه و اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل وجود دارد. اثبات آن‌ها را در سال‌های آینده فرامی‌گیرید. در این‌جا می‌خواهیم به کمک مثال، درستی برخی از این روابط را بررسی کنیم.

مجموعه‌ی مرجع را $U=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ در نظر گرفته و $A=\{۲,۳,۵\}$ و $B=\{۳,۵,۷,۸\}$ تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم درستی رابطه‌ی $(A\cup B)'=A'\cap B'$ را در این مثال بررسی کنیم، به همین دلیل مجموعه‌های راست و چپ تساوی را جداگانه به دست می‌آوریم.

$$A\cup B=\{۲,۳,۵,۷,۸\} \Rightarrow (A\cup B)'=U-(A\cup B)=\{۱,۴,۶,۹,۱۰\}$$

$$A'=\{۱,۴,۶,۷,۸,۹,۱۰\}\ ,\ B'=\{۱,۲,۴,۶,۹,۱۰\} \Rightarrow A'\cap B'=\{۱,۴,۶,۹,۱۰\}$$

در حالت کلی داریم:

$$\underset{(۱)}{\boxed{(A')'=A}} \qquad \underset{(۲)}{\boxed{(A\cup B)'=A'\cap B'}} \qquad \underset{(۳)}{\boxed{(A\cap B)'=A'\cup B'}} \qquad \underset{(۴)}{\boxed{A-B=A\cap B'}}$$

۱ قانون اول بیان می‌کند که متممِ متممِ یک مجموعه، برابر خود مجموعه می‌شود (مثل این‌که یه عدد رو دو بار تو منفی ضرب کنید).

۲ قانون دوم بیان می‌کند مجموعه‌ی اشیایی که در اجتماع دو مجموعه نیستند، یعنی $(A\cup B)'$، همان اشیایی هستند که نه در A و نه در B بوده‌اند، یعنی $A'\cap B'$.

۳ قانون سوم بیان می‌کند مجموعه‌ی اشیایی که در اشتراک دو مجموعه نیستند، یعنی $(A\cap B)'$، همان اشیایی هستند که در A نبودند یا در B نبوده‌اند، یعنی $A'\cup B'$. به روابط (۲) و (۳) قانون‌های دمورگان گفته می‌شود.

۴ قانون چهارم بیان می‌کند مجموعه‌ی اشیایی که عضو A بوده ولی عضو B نیستند (فقط عضو A بوده‌اند)، یعنی $A-B$، همان اشیایی هستند که عضو A بوده و عضو B نیستند، یعنی $A\cap B'$.

توجه کردید که $\cup$ به فارسی به صورت «یا» و $\cap$ به فارسی به صورت «و» گفته می‌شود.

پله‌ی سوم: تعداد عضوهای اجتماع و تفاضل و متمم مجموعه‌ها

۱ **تعداد عضوهای $A\cup B$**: اگر تعداد اعضای A را با تعداد اعضای B جمع کنیم، عضوهای تکراری دو بار شمرده می‌شوند (*در صورتی که عضوهای تکراری تو $A\cup B$ رو یه بار می‌نویسیم*)، پس یک بار آن را کم می‌کنیم، بنابراین:

$$\underbrace{n(A\cup B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در A یا در B هستند}} = \underbrace{n(A)}_{\text{تعداد A}} + \underbrace{n(B)}_{\text{تعداد B}} - \underbrace{n(A\cap B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در هر دوی A,B هستند}}$$

نکته A و B را دو مجموعه‌ی جدا از هم یا مجزا گوییم هرگاه اشتراکی نداشته باشند؛ به عبارت دیگر $A\cap B=\varnothing$. رابطه‌ی بالا در این حالت به صورت مقابل درمی‌آید.

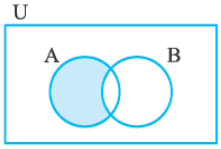
$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\underbrace{n(\varnothing)}_{\text{صفر}}=n(A)+n(B)$$

یعنی اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، برای به دست آوردن تعداد عضوهای اجتماع، تعداد عضوهای دو مجموعه را با هم جمع می‌کنیم.

۲ **تعداد عضوهای $A-B$**: شکل زیر نمایش نمودار ون $A-B$ است. برای به دست آوردن تعداد عضوهای این مجموعه، کافی است تعداد عضوهای مشترک را از تعداد اعضای A کم کنیم.

به عبارت دیگر:

$$\underbrace{n(A-B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در A هستند ولی در B نیستند (فقط A)}} = \underbrace{n(A)}_{\text{n (مجموعه‌ی اول)}} - \underbrace{n(A\cap B)}_{\text{n (اشتراک)}}$$



۳ **تعداد عضوهای متمم**:

$$\underbrace{n(A')}_{\text{تعداد عضوهایی که در A نیستند.}} = \underbrace{n(U)}_{\text{تعداد مرجع}} - n(A)$$

برای به دست آوردن تعداد عضوها، هم می‌توانید از این روابط مهم استفاده کنید یا این‌که از نمودار ون کمک بگیرید.

مثال و پاسخ

مثال در یک کلاس ۳۰ نفره، ۸ نفر عضو تیم والیبال، ۱۴ نفر عضو تیم فوتبال و ۳ نفر هم عضو هر دو تیم هستند.

الف چند نفر عضو تیم والیبال یا فوتبال هستند؟ (به عبارت دیگر، چند نفر عضو حداقل یکی از تیم‌ها هستند؟)

پاسخ V و F را به ترتیب مجموعه‌ی دانش‌آموزان عضو تیم والیبال و فوتبال تعریف می‌کنیم:

$$\underbrace{n(V\bigcup F)}_{\text{تعداد فوتبال یا والیبال}}=n(V)+n(F)-n(V\bigcap F)=۸+۱۴-۳=۱۹$$

بنابراین ۱۹ نفر، عضو حداقل یکی از تیم‌های فوتبال یا والیبال هستند (حالا فوتبال یا والیبال یا هر دو)

ب چند نفر عضو تیم فوتبال بوده ولی عضو تیم والیبال نیستند؟

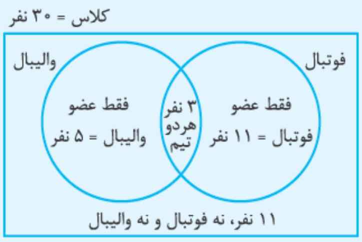
پاسخ ۱۱ نفر فقط فوتبالی هستند. $n(F\bigcap V')=n(F-V)=n(F)-n(F\bigcap V)=۱۴-۳=۱۱$

پ چند نفر عضو تیم والیبال هستند ولی عضو تیم فوتبال نیستند؟

پاسخ ۵ نفر فقط والیبالی هستند. $n(V\bigcap F')=n(V-F)=n(V)-n(V\bigcap F)=۸-۳=۵$

ت چند نفر عضو هیچ‌کدام از تیم‌ها نیستند؟

پاسخ **روش اول** طبق قسمت الف، ۱۹ نفر فوتبالی یا والیبالی هستند. کلاس ۳۰ دانش‌آموز دارد، بنابراین $۳۰-۱۹=۱۱$ نفر، نه عضو فوتبال و نه عضو والیبال هستند. طبق توضیحات پله‌ی دوم این تعداد همان $n((V\bigcup F)')$ یا $n(V'\bigcap F')$ خواهند بود.

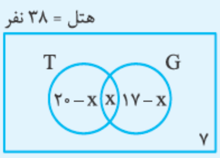


روش دوم از نمودار ون استفاده می‌کنیم. شکلی به صورت مقابل رسم می‌کنیم. اول ۳ نفر را در قسمت اشتراک می‌نویسیم. کل والیبالی‌ها ۸ نفر بودند، پس $۸-۳=۵$ نفر فقط عضو والیبال هستند. به همین صورت $۱۴-۳=۱۱$ نفر هم فقط عضو فوتبال هستند. حالا $۱۹=۱۱+۳+۵$ نفر بالاخره عضو حداقل یکی از تیم‌ها و بنابراین $۳۰-۱۹=۱۱$ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

مثال در یک هتل، ۳۸ مسافر وجود دارد. ۲۰ نفر آنان تاجر و ۱۷ نفر جهانگرد هستند. اگر ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد باشند، چند مسافرِ تاجرِ جهانگرد در هتل وجود دارد؟

پاسخ **روش اول** از ۳۸ مسافر، ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد هستند، پس $۳۸-۷=۳۱$ نفر بالاخره تاجر هستند یا جهانگرد. مجموعه‌ی تاجران و جهانگردان را به ترتیب T و G در نظر می‌گیریم:

$$n\underbrace{(T\bigcup G)}_{\text{تاجر یا جهانگرد}}=n(T)+n(G)-n\underbrace{(T\bigcap G)}_{\text{تاجر و جهانگرد}}\Rightarrow ۳۱=۲۰+۱۷-n(T\bigcap G)\Rightarrow n(T\bigcap G)=۶$$



روش دوم از نمودار ون کمک می‌گیریم. اول اشتراک اما چون آن را نداریم $n(T\bigcap G)=x$ می‌گیریم. $n(T)=۲۰$، پس تعداد افرادی که فقط تاجرند $۲۰-x$ خواهد بود. به همین صورت افرادی که فقط جهانگرد هستند $۱۷-x$ نفر خواهند بود. در داخل دایره‌ها $۲۰-x+x+۱۷-x$ نفر وجود دارد. به شکل دیگری می‌توان گفت داخل دایره‌ها $۳۸-۷=۳۱$ نفر وجود دارد، پس:

$$۲۰-x+x+۱۷-x=۳۱\Rightarrow ۳۷-x=۳۱\Rightarrow x=۶$$

سؤال‌های امتحانی

۱۰- فرض کنید مجموعه‌ی $A=\{۰,۱,۲\}$ باشد. متمم مجموعه‌ی A را نسبت به هر کدام از مجموعه‌های مرجع داده‌شده به دست آورید.

الف) $U=\{-۵,-۴,\dots,۵\}$ ب) $U=\mathbb{Z}$ پ) $U=[۰,۲]$

ت) $U=(-۱,۴]$ ث) $U=\mathbb{R}$

۱۱- فرض کنید $U=\mathbb{R}$ باشد. متمم مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ را مشخص کرده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید.

۱۲- جاهای خالی را تکمیل کنید.

الف) $A\cup A'=\cdots$ ب) $A\cap A'=\cdots$ پ) $U\cup A=\cdots$ ت) $U\cap A=\cdots$

ث) $U-A=\cdots$ ج) $A-U=\cdots$ چ) $\varnothing'=\cdots$ ح) $U'=\cdots$

۱۳- فرض کنید $U=[-۳,۳]$ باشد. متمم مجموعه‌های $[-۳,۰)$، $(-۳,۱)$، $(-۳,۳)$ و $(۰,۱)$ را به دست آورید.

۱۴- فرض کنید $U=\mathbb{R}$، $A=(-\infty,۱]$ و $B=(۲,+\infty)$ باشد. مجموعه‌های A'، B'، $A'\cap B'$، $(A\cap B)'$ و $(A-B)'$ را به دست آورید.

۱۵- اگر $U=\{۱,۲,\dots,۱۰\}$، مجموعه‌ی مضارب ۲ برابر A و مجموعه‌ی مضارب ۳ برابر B باشد، با تکمیل جدول درستی هر یک از رابطه‌های زیر را نشان دهید.

A'	B'	$A\cup B$	$(A\cup B)'$	$A'\cap B'$	نتیجه

A	A'	$(A')'$	نتیجه
			$A=(A')'$

B'	$A-B$	$A\cap B'$	$A-(A\cap B)$	نتیجه

A'	B'	$A\cap B$	$(A\cap B)'$	$A'\cup B'$	نتیجه

۱۶- اگر $U=\mathbb{Z}$، $A=\mathbb{N}$، $B=\mathbb{W}$ و $C=\{-۲,-۱,۰,۱\}$ باشد، با محاسبه‌ی دو طرف تساوی $A-(B\cup C)=A\cap B'\cap C'$، درستی آن را نشان دهید.

۱۷- درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (U مجموعه‌ی مرجع است.)

الف) متمم مجموعه‌ی متناهی، همواره نامتناهی است. ب) اگر U نامتناهی و A متناهی باشد، آن‌گاه A' نامتناهی است.

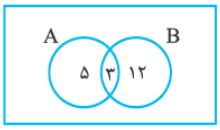
پ) اگر U نامتناهی و A نامتناهی باشد، آن‌گاه A' متناهی است. ت) $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B'\subseteq A'$.

۱۸- در هر قسمت با قراردادن مجموعه‌ی مناسب به جای U کاری کنید که تساوی برقرار گردد.

الف) $\{x\in U\,|\,-۳<x\le ۲\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$ ب) $\{x\in U\,|\,-۳<x\le ۲\}=\{۱,۲\}$

پ) $\{x\in U\,|\,-۳<x\le ۲\}=\{۰,۱,۲\}$ ت) $\{x\in U\,|\,-۳<x\le ۲\}=(-۳,۲]$

۱۹- تعداد عضوهای هر قسمت در نمودار مقابل نوشته شده است. تعداد عضوهای مجموعه‌های زیر را به دست آورید.



$n(A\cup B)=\cdots$ $n(B)=\cdots$ $n(A)=\cdots$

$n((A\cup B)')=\cdots$ $n(A-B)=\cdots$ $n(B-A)=\cdots$

$n(A\cap B')=\cdots$ $n(B')=\cdots$ $n((A-B)\cup(B-A))=\cdots$

$n(A')=\cdots$ $n(A'\cap B)=\cdots$ $n(A'\cap B')=\cdots$

۲۰- در یک نمایشگاه ماشین ۵۰ اتومبیل وجود دارد. ۱۷ ماشین ترمز ABS و ۳۰ ماشین، فرمان هیدرولیک دارند. اگر ۶ ماشین هم ترمز ABS و هم فرمان هیدرولیک داشته باشند،

الف) چند ماشین حداقل یکی از دو امکانات را دارند؟

ب) چند ماشین نه ترمز ABS و نه فرمان هیدرولیک دارند؟

۲۱- در یک همایش ۱۲۰ نفر شرکت کرده‌اند. ۴۳ نفر از آنان، عضو هیچ شبکه‌ی اجتماعی نیستند، در حالی که ۷۰ نفر عضو شبکه‌ی اجتماعی A و ۳۰ نفر عضو هر دو شبکه‌ی اجتماعی A و B هستند. چند نفر عضو شبکه‌ی اجتماعی B هستند؟

۲۲- در یکی از مدارس استان خراسان رضوی، ۱۲ نفر عضو تیم المپیاد ریاضی و ۹ نفر عضو تیم المپیاد فیزیک هستند. اگر ۳ نفر عضو هر دو تیم المپیاد باشند و ۷۵ نفر هم عضو هیچ‌کدام از تیم‌ها نباشند،

الف) این مدرسه چند دانش‌آموز دارد؟ ب) چند نفر فقط عضو المپیاد ریاضی هستند؟

پ) چند نفر فقط عضو المپیاد فیزیک هستند؟ ت) چند نفر عضو فقط یکی از تیم‌ها هستند؟

ث) چند نفر عضو تیم ریاضی نیستند؟

۲۳- در یک کلاس ۳۱ نفره، ۲۰ نفر در درس ریاضی و ۱۳ نفر در درس فیزیک قبول شده‌اند. اگر ۷ نفر در هر دو درس مردود شده باشند، چند نفر در هر دو درس قبول شده‌اند؟

۲۴- اگر $n(A)=۱۲$، $n(B)=۸$ و $n(A\cap B)=۳$ باشد، $n(A\cup B)$، $n(A'\cap B)$ و $n(A\cap B')$ را به دست آورید.

۲۵- اگر $n(U)=۱۰۰$، $n(A')=۲۳$، $n(A-B)=۴۵$ و $n(B)=۳۲$ باشد، $n(A\cup B)$، $n(A\cap B')$ و $n((A\cup B)')$ را به دست آورید.

۳ الگو و دنباله

پله‌ی اول: الگوهای عددی

دنیای ما سرشار از الگوهای مختلفی است. برای مثال، مدل رشد بسیاری از گیاهان و جانوران، گردش سیارات و بسیاری از طرح‌های هنری، دارای الگوهای منظم و زیبایی هستند. الگو، یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده، رشدکننده یا ترکیبی از آن‌ها باشد. یکی از کاربردهای مهم ریاضی، پیداکردن این الگوهای نهفته است. کشف این الگوها، پیش‌بینی‌های مناسبی از رفتار پدیده‌ها برای ما به ارمغان می‌آورد. اهمیت این موضوع به اندازه‌ای است که برخی از ریاضی‌دانان، ریاضی را علم مطالعه‌ی الگوها می‌نامند. در این درس، برخی از الگوهای هندسی و عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال و پاسخ

مثال **به شکل‌های زیر توجه کنید. تعداد دایره‌های به کار رفته در هر شکل چندتا است؟ آیا می‌توانید تعداد دایره‌های شکل پنجم را حدس بزنید؟ شکل n ام را چه‌طور؟**

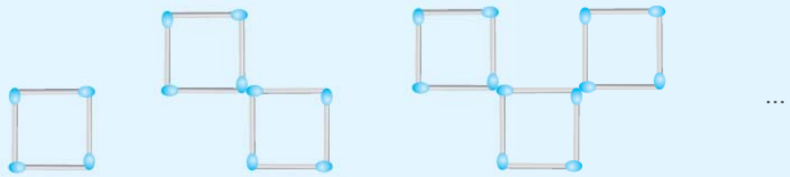
۱ ۲ ۳ ۴

$(1)^2$ $(2)^2$ $(3)^2$ $(4)^2$ ...

پاسخ تعداد دایره‌های شکل nام را با a_n نمایش می‌دهیم. مثلاً $a_1=1$، $a_2=4$، $a_3=9$ و ... . توجه دارید که a_1، a_2 و ... همانند متغیرهای x، y و ... هستند، اما اگر بنویسیم $y=4$، مشخص نیست تعداد دایره‌های کدام شکل برابر ۴ است. a_n را متغیر اندیس‌دار می‌نامند و آن را a اندیس n *(یا ساده‌تر اِن)* می‌خوانیم. با توجه به الگوی تعداد دایره‌ها، می‌فهمیم تعداد دایره‌ها در شکل nام برابر n^2 است، بنابراین می‌نویسیم $a_n=n^2$.

a_n را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامیم. با داشتن جمله‌ی عمومی الگو، می‌توانیم تعداد دایره‌های هر شکل را به دست آوریم. مثلاً $a_{10}=10^2=100$ یعنی در شکل دهم، ۱۰۰ دایره وجود دارد. جمله‌ی عمومی الگوها را می‌توانیم با a_n، b_n، t_n و ... نمایش دهیم. n شماره‌ی الگو و a_n، مقدار مورد بررسی در الگوی nام است.

مثال **با توجه به الگو، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام (جمله‌ی عمومی الگو) را حدس بزنید.**



$a_1=1(4)$ $a_2=2(4)$ $a_3=3(4)$ $a_n=n(4)=4n$

پاسخ آیا می‌توانید بگویید در شکل چندم، تعداد ۹۶ چوب‌کبریت به کار رفته است؟ تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام می‌شود $4n$، پس $4n=96$ و لذا $n=24$، یعنی $a_{24}=96$ است و در شکل بیست و چهارم، ۹۶ چوب‌کبریت وجود دارد.

پله‌ی دوم: الگوهای خطی

به الگوهای به دست آمده در دو مثال قبل توجه کنید.

$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \quad \dots$

در الگوی اول، تعداد دایره‌هایی که در هر شکل نسبت به شکل قبلی اضافه می‌شود، به صورت بالا است. مشخص است که وقتی از یک شکل به شکل بعدی می‌رویم، تعداد دایره‌های اضافه‌شده، ثابت نیستند. *(از اولی به دومی ۳تا اضافه شده، از دومی به سومی ۵تا اضافه شده و ...)*

اما در مثال دوم، تعداد چوب‌کبریت‌های اضافه‌شده به صورت مقابل است.

$4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} 12 \xrightarrow{+4} 16 \quad \dots$

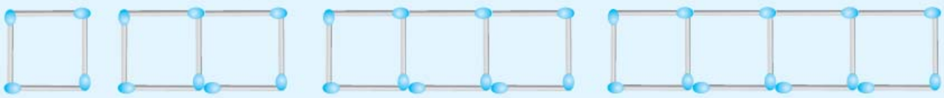
اگر تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل را با عدد ثابت ۴، جمع کنیم، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بعدی به دست می‌آید. چنین الگویی را خطی می‌گوییم. علت این نام‌گذاری آن است که اگر نقاط $(1,4)$ و $(2,8)$ و $(3,12)$ و ... را روی دستگاه مختصات رسم کنیم، همه‌ی آن‌ها روی خط $y=4x$ قرار دارند.

الگوی خطی، الگوهایی که در آن‌ها، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، یک عدد ثابت باشد (*تو مثال دوم ۴*) را الگوی خطی می‌نامیم.

جمله‌ی عمومی الگوهای خطی، در سال گذشته دیدید معادله‌ی خطوط در حالت کلی به صورت $y = ax + b$ است. شبیه همین، جمله‌ی عمومی الگوهای خطی به صورت $t_n = an + b$ است. به عبارت دیگر جمله‌ی عمومی الگوهای خطی یک چندجمله‌ای درجه، نسبت به n است. ضریب n (*عدد a*) همان اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی الگو را نشان می‌دهد.

مثال و پاسخ

مثال **با توجه به الگوی زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام را بیابید. آیا الگوی به دست آمده خطی است؟**



شکل nاُم	شکل چهارم	شکل سوم	شکل دوم	شکل اول
$t_n = ۴ + (n-۱)(۳)$	$۴ + ۳(۳)$	$۴ + ۲(۳)$	$۴ + ۱(۳)$	۴

پاسخ جمله‌ی عمومی الگو را ساده می‌کنیم، بنابراین: $t_n = ۴ + (n-۱)(۳) = ۴ + ۳n - ۳ = ۳n + ۱$

الگوی به دست آمده خطی است. ضریب n (یعنی ۳)، تعداد چوب‌کبریت‌های اضافه‌شده در هر مرحله را نشان می‌دهد.

می‌توانستیم تعداد چوب‌کبریت‌ها را با الگوی دیگری هم به دست آوریم. در شکل اول یک مربع (۴ چوب‌کبریت) وجود دارد، پس $t_۱ = ۴$. در شکل دوم، دو مربع وجود دارد اما چوب‌کبریت وسط دو بار شمارش شده است، پس یک بار آن را کم می‌کنیم، پس $t_۲ = ۴ \times ۲ - ۱$. در شکل سوم سه مربع (۴×۳) وجود دارد ولی هر کدام از چوب‌کبریت‌های وسط را دو بار شمارش کرده‌ایم، پس آن‌ها را کم می‌کنیم، یعنی $t_۳ = ۴ \times ۳ - ۲$ و ... . به همین صورت تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام می‌شود: $t_n = ۴n - (n-۱) \Rightarrow t_n = ۳n + ۱$

پله‌ی سوم: دنباله

در پله‌ی قبلی، برای هر الگوی هندسی، یک الگوی عددی به دست آوردیم. مثلاً الگوی عددی تعداد چوب‌کبریت‌ها در مثال قبل به صورت $۴, ۷, ۱۰, ۱۳, \ldots$ به دست آمد. به این الگوی عددی، یک دنباله گفته می‌شود.

تعریف دنباله، الگوهایی را که در آن‌ها تعدادی عدد، پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. اعداد موجود در دنباله را جمله‌های دنباله می‌نامیم (*جمله‌ی اول، جمله‌ی دوم و ...*). جمله‌ی عمومی دنباله را معمولاً با t_n نمایش می‌دهیم. با استفاده از جمله‌ی عمومی دنباله، می‌توان مقدار جمله‌های آن را به دست آورد.

مثال و پاسخ

مثال **چهار جمله‌ی اول هر دنباله را به دست آورید.**

پاسخ برای به دست آوردن جمله‌ی اول، دوم و ... کافی است به جای n اعداد ۱، ۲ و ... را قرار دهیم.

الف) $t_n = \frac{۱}{n}$ $\qquad t_۱ = ۱, t_۲ = \frac{۱}{۲}, t_۳ = \frac{۱}{۳}, t_۴ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots$

ب) $t_n = n(n+۱)$ $\qquad t_۱ = ۱ \times ۲ = ۲, t_۲ = ۲ \times ۳ = ۶, t_۳ = ۳ \times ۴ = ۱۲, t_۴ = ۴ \times ۵ = ۲۰ \Rightarrow ۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \ldots$

پ) $t_n = \sqrt{n}$ $\qquad t_۱ = ۱, t_۲ = \sqrt{۲}, t_۳ = \sqrt{۳}, t_۴ = \sqrt{۴} = ۲ \Rightarrow ۱, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, ۲, \ldots$

مثال **جمله‌ی عمومی دنباله‌های زیر را حدس بزنید.**

الف) $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \ldots \xrightarrow{\text{حدس الگو}} \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲^۲}, \frac{۱}{۲^۳}, \frac{۱}{۲^۴}, \ldots \Rightarrow t_n = \frac{۱}{۲^n}$

ب) $۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, \ldots \xrightarrow{\text{حدس الگو}} ۲(۱), ۲(۲), ۲(۳), ۲(۴), \ldots \Rightarrow t_n = ۲n$

پ) $۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴, \ldots \xrightarrow{\text{حدس الگو}} ۱^۲ - ۱, ۲^۲ - ۱, ۳^۲ - ۱, ۴^۲ - ۱, ۵^۲ - ۱, \ldots \Rightarrow t_n = n^۲ - ۱$

با تمرین‌های متنوع و توجه به دنباله‌های پرکاربرد مانند مضارب، مربع‌های کامل، توان‌ها و ... می‌توانید جمله‌ی عمومی دنباله‌ها را حدس بزنید.

مثال و پاسخ

مثال **جمله‌ی چهارم دنباله‌ی $a_n = n^۲ - ۵$ با کدام جمله‌ی دنباله‌ی $b_n = ۳n - ۷$ برابر است؟**

پاسخ برای به دست آوردن جمله‌ی چهارم دنباله‌ی a_n، $n = ۴$ قرار می‌دهیم، پس $a_۴ = ۴^۲ - ۵ = ۱۱$. می‌خواهیم ببینیم کدام جمله‌ی دنباله‌ی b_n (*کدوم n*) برابر با ۱۱ است، پس $۳n - ۷ = ۱۱$ و لذا $n = ۶$. جمله‌ی ششم دنباله‌ی b_n برابر با جمله‌ی چهارم a_n است.

مثال و پاسخ

مثال **بین جمله‌های دنباله‌ای، رابطه‌ی $a_{n+1} = a_n + ۲^n$ که $a_۱ = ۱$ است برقرار است. جمله‌های دوم تا پنجم دنباله را به دست آورید.**

پاسخ

$n=۱ \Rightarrow a_۲ = a_۱ + ۲^۱ = ۱+۲ = ۳$ \quad $n=۲ \Rightarrow a_۳ = a_۲ + ۲^۲ = ۳+۴ = ۷$

$n=۳ \Rightarrow a_۴ = a_۳ + ۲^۳ = ۷+۸ = ۱۵$ \quad $n=۴ \Rightarrow a_۵ = a_۴ + ۲^۴ = ۱۵+۱۶ = ۳۱$

توجه دارید که برای به دست آوردن مقدار هر جمله، به جمله‌ی قبلی نیاز داریم. در این مواقع گفته می‌شود، دنباله به صورت بازگشتی، داده شده است. جمله‌های این دنباله می‌شود: $۱,۳,۷,۱۵,۳۱,\dots$

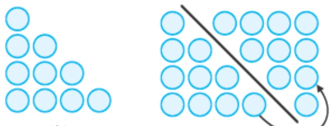
مثال **جمله‌ی c_n جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی (الگو) خطی است که $c_۳ = ۷$ و $c_۹ = ۴۳$. جمله‌ی عمومی را به دست آورید.**

پاسخ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی خطی به صورت $c_n = an + b$ است. حالا:

$$\begin{cases} c_۳ = ۷ \Rightarrow ۳a + b = ۷ \\ c_۹ = ۴۳ \Rightarrow ۹a + b = ۴۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۶a = ۳۶ \Rightarrow a = ۶ \Rightarrow b = -۱۱ \Rightarrow c_n = ۶n - ۱۱$$

پله‌ی چهارم: مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n

می‌خواهیم با توجه به الگوی زیر، مجموع $۱+۲+۳+\dots+n$ را به دست آوریم. قبل از به دست آوردن رابطه‌ی کلی، حاصل عبارت را به ازای $n=۴$ بررسی می‌کنیم. تعداد دایره‌های شکل (۱) برابر $۱+۲+۳+۴$ است. همین تعداد دایره را به صورت برعکس کرده و کنار دایره‌ها قرار می‌دهیم تا شکل ۲ به دست آید. تعداد دایره‌های شکل دوم $۲(۱+۲+۳+۴)$ خواهد بود. از طرفی شکل (۲) یک مستطیل است، پس تعداد دایره‌ها می‌شود ۵×۴، بنابراین:



(۱) (۲)

$$۲(۱+۲+۳+۴) = ۴\times۵ \Rightarrow ۱+۲+۳+۴ = \frac{۴\times۵}{۲}$$

در حالت کلی با همین الگو می‌توان ثابت کرد:

$$۱+۲+۳+\dots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

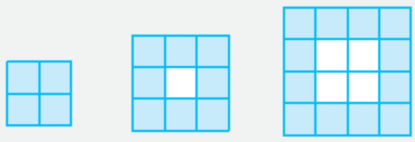
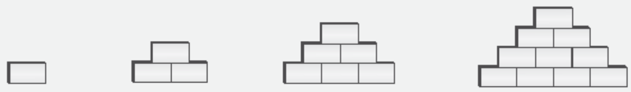
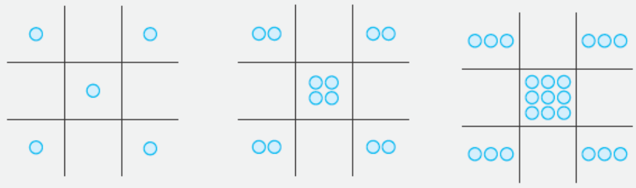
مثلاً:

$$۱+۲+\dots+۱۰ = \frac{۱۰\times۱۱}{۲} = ۵۵ \quad \text{یا} \quad ۱+۲+۳+\dots+۲۰ = \frac{۲۰\times۲۱}{۲} = ۲۱۰$$

سؤال‌های امتحانی

۲۶- در هر ردیف با توجه به الگوهای ابتدایی، جمله‌ی عمومی آن را به دست آورید و مشخص کنید الگو خطی است یا غیرخطی.

خطی یا غیرخطی: خطی	غیرخطی	جمله‌ی عمومی الگو	
○	○	تعداد پاره‌خط‌های شکل nاُم = ...	 $a_۱ =$ $a_۲ =$ $a_۳ =$
○	○	تعداد مربع‌های شکل nاُم = ...	 $a_۱ =$ $a_۲ =$ $a_۳ =$ $a_۴ =$
○	○	تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nاُم = ...	 $a_۱ =$ $a_۲ =$ $a_۳ =$ $a_۴ =$

 $a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$	...... = تعداد مربع‌های رنگی در شکل nاُم	○	○
 $a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$	...... = تعداد آجرهای شکل nاُم	○	○
 $a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$	...... = تعداد مهره‌های شکل nاُم	○	○

۲۷- c_n جمله‌ی عمومی یک الگوی خطی است که $c_4 = 17$ و $c_{10} = 35$ است. c_{20} را بیابید.

۲۸- در هر قسمت، چهار جمله‌ی اول هر دنباله را به دست آورید.

الف) $a_1 = -1$ و $a_{n+1} - a_n = 7$ ب) $b_1 = 2$ و $b_{n+1} = 3b_n$ پ) $c_1 = c_2 = 1$ و $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$

۲۹- با توجه به پله‌ی چهارم، حاصل عبارت $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ را به دست آورید.

۴ دنباله‌های حسابی و هندسی

پله‌ی اول: دنباله‌ی حسابی

به دنباله‌های مقابل دقت کنید. هر جمله با عدد ثابتی جمع شده و جمله‌ی بعدی به دست می‌آید. به چنین دنباله‌هایی، دنباله‌ی حسابی گفته می‌شود. عدد ثابت هر دنباله را قدرنسبت دنباله‌ی حسابی می‌نامیم.

$$2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{+5} 12 \xrightarrow{+5} 17 \xrightarrow{+5} 22 ,\ \dots$$

$$7 \xrightarrow{-2} 5 \xrightarrow{-2} 3 \xrightarrow{-2} 1 \xrightarrow{-2} -1 ,\ \dots$$

$$1 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 2 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{5}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 3 ,\ \dots$$

قدرنسبت ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد. قدرنسبت دنباله‌های بالا به ترتیب ۵ و $\frac{1}{2}$ و -2 هستند.

تعریف دنباله‌ی حسابی: دنباله‌ای را که در آن هر جمله (*به‌جز جمله‌ی اول*)، با اضافه‌شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی می‌نامیم. در دنباله‌ی حسابی، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی دنباله، عدد ثابتی است (*همان الگوی خطی*). به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله گفته و آن را با d نمایش می‌دهیم. جمله‌ی اول دنباله‌های حسابی را نیز معمولاً با a نمایش می‌دهیم.

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی: با استفاده از جمله‌ی اول (a) و قدرنسبت (d) دنباله‌ی حسابی، می‌توان جمله‌ی عمومی آن را به دست آورد.

جمله‌ی اول $= t_1$	جمله‌ی دوم $= t_2$	جمله‌ی سوم $= t_3$	جمله‌ی چهارم $= t_4$	...	جمله‌ی nاُم $= t_n$
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	...	$a+(n-1)d$
	$+d$	$+d$	$+d$		

ضریب d، یکی کم‌تر از شماره‌ی جمله است، بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت d می‌شود:

$$\boxed{t_n = a + (n-1)d}$$

مثال و پاسخ

مثال جمله‌ی عمومی هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

الف $-1,3,7,11,\dots \xrightarrow[\text{(d=4 می‌شه، پس)}]{\text{چهار تا چهار تا اضافه}} t_n=a+(n-1)d \Rightarrow t_n=-1+(n-1)(4) \Rightarrow t_n=4n-5$

ب $-2,-5,-8,\dots \xrightarrow[\text{(d=-3 کم می‌شه، پس)}]{\text{سه تا سه تا}} t_n=a+(n-1)d \Rightarrow t_n=-2+(n-1)(-3) \Rightarrow t_n=-3n+1$

مثال جمله‌ی دهم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۴ و جمله‌ی هجدهم آن برابر ۵۶ است. جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم $t_n=a+(n-1)d$، پس برای به دست آوردن جمله عمومی، نیاز به a و d داریم.

(تو فرمول n = ۱۰ می‌ذاریم)

$$\begin{cases} t_{10}=24 \Rightarrow a+9d=24 \\ t_{18}=56 \Rightarrow a+17d=56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-9d=-24 \\ a+17d=56 \end{cases}$$

(تو فرمول n = ۱۸ می‌ذاریم)

$$8d=32 \Rightarrow d=4 \Rightarrow a=-12 \Rightarrow t_n=a+(n-1)d=-12+(n-1)(4)=4n-16$$

مثال دنباله‌ای حسابی معرفی کنید که جمله‌ی اول آن ۱ بوده و مجموع ۵ جمله‌ی اول آن، $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جمله‌ی بعدی باشد.

پاسخ

$$t_1+t_2+t_3+t_4+t_5=\frac{1}{4}(\underbrace{t_6+t_7+t_8+t_9+t_{10}}_{\text{پنج جمله‌ی بعدی}})$$

$$\xrightarrow[\text{باز می‌کنیم و (a=1)}]{\text{با فرمول جمله‌ی عمومی}} (a+a+d+a+2d+a+3d+a+4d)=\frac{1}{4}(a+5d+a+6d+a+7d+a+8d+a+9d)$$

$$\Rightarrow 5a+10d=\frac{1}{4}(5a+35d) \xrightarrow{a=1} 5+10d=\frac{1}{4}(5+35d) \xrightarrow{\times 4} 20+40d=5+35d \Rightarrow 5d=-15$$

$$\Rightarrow d=-3 \Rightarrow \text{دنباله: } 1,-2,-5,-8,\dots \Rightarrow t_n=1+(n-1)(-3)=-3n+4$$

پله‌ی دوم: واسطه‌ی حسابی دو عدد

فرض کنید سه عدد a,b,c (از چپ به راست) تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، به عبارت دیگر سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی باشند. چه ارتباطی بین این سه جمله برقرار است؟

$$\begin{cases} a+d=b \\ b+d=c \end{cases} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{دو طرف را کم}} a-b=b-c \Rightarrow a+c=2b \Rightarrow \boxed{\frac{a+c}{2}=b}$$

یعنی b، میانگین دو عدد کناری خواهد بود. به عدد b میانگین یا واسطه‌ی حسابی دو عدد c و a گفته می‌شود. مثلاً واسطه‌ی حسابی دو عدد ۵ و ۱- می‌شود: $2=\frac{-1+5}{2}$؛ حالا سه عدد ۵ ، ۲ و ۱- تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند.

مثال و پاسخ

مثال سه عدد $k+6$ ، $k+1$ و $2k-5$ تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. k و قدرنسبت را به دست آورید.

پاسخ $\frac{2k-5+k+6}{2}=k+1 \Rightarrow 3k+1=2k+2 \Rightarrow k=1$

اعداد را از راست به چپ بگیریم: $d=-5$ و اگر اعداد را از چپ به راست بگیریم: $-3,2,7 \Rightarrow d=+5$

پله‌ی سوم: پیدا کردن سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی

دسته مسئله‌های معروفی وجود دارند که در آن‌ها رابطه‌ی خاصی بین سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی داده شده و خود جمله‌ها خواسته می‌شود. برای این‌که مسئله، سه‌مجهولی نشود و دارای دو مجهول باشد، اعداد را به صورت $x-d,x,x+d$ در نظر می‌گیریم. به صورت مشابه، اگر پنج جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی حسابی مجهول باشد، بهتر است آن‌ها را به صورت $x-2d,x-d,x,x+d,x+2d$ در نظر بگیرید. با حل معادله‌ها، d و x به دست می‌آیند.

مثال و پاسخ

مثال **مجموع سه عدد که دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند برابر ۱۲ و مجموع مربعات آن‌ها ۶۶ است. این اعداد را بیابید.**

پاسخ اعداد را به صورت $x-d, x, x+d$ می‌گیریم، پس: $x-d+x+x+d=۱۲ \Rightarrow x=۴$

پس اعداد به صورت $۴-d, ۴, ۴+d$ هستند. حالا:

$$(۴-d)^۲+۴^۲+(۴+d)^۲=۶۶ \Rightarrow ۱۶-۸d+d^۲+۱۶+۱۶+۸d+d^۲=۶۶ \Rightarrow ۴۸+۲d^۲=۶۶ \Rightarrow d^۲=۹ \Rightarrow \begin{cases} d=۳ \Rightarrow ۱,۴,۷ \\ d=-۳ \Rightarrow ۷,۴,۱ \end{cases}$$

پله‌ی چهارم: درج n واسطه‌ی حسابی

در پله‌ی دوم بین دو عدد c و a یک واسطه‌ی حسابی مانند b قرار دادیم. در این پله می‌خواهیم این مسئله را در حالت کلی حل کنیم. فرض کنید می‌خواهیم بین دو عدد c و a، تعداد n عدد، طوری قرار دهیم که همه‌ی این $n+۲$ عدد، تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند. جمله‌ی اول دنباله همان a و جمله‌ی $n+۲$ام دنباله همان c است. با نوشتن معادله و بازکردن با فرمول جمله‌ی عمومی، d به دست می‌آید.

$$a \quad \overbrace{\square \quad \square \quad \cdots \quad \square}^{n\text{عدد}} \quad c$$

مثال و پاسخ

مثال **بین دو عدد ۵ و ۲۰ چهار عدد، طوری قرار دهید که تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند.**

$$۵ \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad ۲۰$$

پاسخ با توجه به شکل مقابل:

$$\begin{cases} a=۵ \\ t_۶=۲۰ \Rightarrow a+۵d=۲۰ \Rightarrow ۵d=۱۵ \Rightarrow d=۳ \end{cases}$$

پس اعداد به صورت $۵ \xrightarrow{+۳} ۸ \xrightarrow{+۳} ۱۱ \xrightarrow{+۳} ۱۴ \xrightarrow{+۳} ۱۷ \xrightarrow{+۳} ۲۰$ خواهند بود.

نکته در حالت کلی اگر n واسطه بین دو عدد c و a درج کنیم، قدرنسبت می‌شود $d=\frac{c-a}{n+1}$. *(داره می‌گه فاصله‌ی بین a تا c به n+۱ قسمت مساوی تقسیم می‌شه. تو همین مثال $d=\frac{۲۰-۵}{۴+۱}=۳$)*

پله‌ی پنجم: رابطه‌ی اندیسی بین جمله‌های دنباله‌ی حسابی

بین جمله‌های دنباله‌ی حسابی، رابطه‌های خاصی وجود دارد. مثلاً دنباله‌ی حسابی به صورت $\overset{t_۱}{۱},۳,\underset{t_۳}{۵},۷,۹,۱۱,\underset{t_۷}{۱۳},۱۵,۱۷,\overset{t_۹}{۱۹}$ را در نظر بگیرید. $t_۱+t_۹=۱۸$، از طرفی $t_۳+t_۷=۱۸$. حالا به جمع اندیس‌ها توجه کنید.

جمع اندیس‌ها برابر ۱۰ است. اگر جمع اندیس‌ها با هم برابر باشند، جمع خود جمله‌ها نیز برابر می‌شود. مثلاً در هر دنباله‌ی حسابی؛ چون جمع اندیس‌ها در هر جمع دوتایی برابر ۱۰ است، داریم:

$$t_۱+t_۹=t_۲+t_۸=t_۳+t_۷=t_۴+t_۶=t_۵+t_۵$$

نکته

$$m,n,p,k \in \mathbb{N}\ ,\ m+n=p+k \Rightarrow t_m+t_n=t_p+t_k$$

توجه دارید که همه‌ی اندیس‌ها مثبت هستند. تذکر بسیار مهم این‌که $t_۳+t_۷ \neq t_{۱۰}$ *(اندیس‌ها رو جمع نکنی بذاری، دوتا این‌ور و دوتا اون‌ور).*

مثال و پاسخ

مثال **در یک دنباله‌ی حسابی $t_۴+t_۸=۲۰$. مجموع یازده جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.**

پاسخ یک معادله بیشتر نداریم. معمولاً در این مواقع، پای رابطه‌ی اندیسی در میان است. طبق این رابطه $t_۱+t_{۱۱}=t_۲+t_{۱۰}=\cdots=t_۶+t_۶$

پس:

$$t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵+t_۶+t_۷+t_۸+t_۹+t_{۱۰}+t_{۱۱}=۵(t_۴+t_۸)+t_۶=۵(۲۰)+t_۶=۱۰۰+۱۰=۱۱۰$$

توجه دارید که $t_۴+t_۸=t_۶+t_۶$، پس $۲۰=۲t_۶$ و $t_۶=۱۰$.

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱-

الف) $\mathbb{Z}$ | ب) $\mathbb{N}$ | پ) $\mathbb{Q}$

ت) $\varnothing$ | ث) $\mathbb{Q}$ | ج) $\varnothing$

چ) $\mathbb{Z}$ | ح) $\varnothing$ | خ) $\mathbb{Q}'$

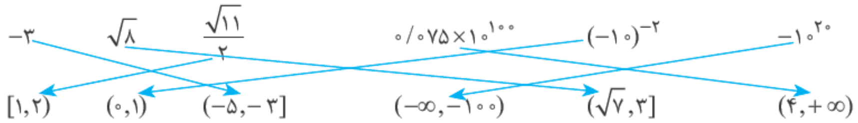
۲- الف) درست | ب) نادرست | پ) نادرست

ت) درست | ث) درست | ج) نادرست

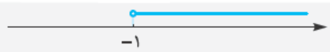
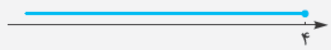
چ) درست ($\varnothing$ زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست) | ح) نادرست ($\frac{\sqrt{۵}}{۳}<۱$)

خ) نادرست

۳-

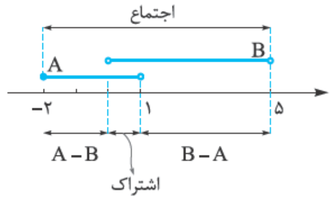


۴-

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
نیم‌باز	$(-۳,۲]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid -۳<x\leq ۲\}$	
باز بی‌کران	$(-۱,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x>-۱\}$	
نیم‌باز بی‌کران	$(-\infty,۴]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq ۴\}$	

۵-

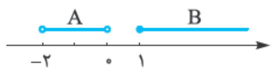
الف)



$A\cup B=[-۲,۵)\ ,\ A\cap B=(۰,۱)$

$A-B=[-۲,۰]\ ,\ B-A=[۱,۵)$

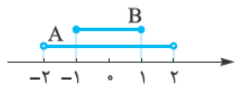
ب)



$A\cup B=(-۲,۰)\cup[۱,+\infty)\ ,\ A\cap B=\varnothing$

$A-B=A=(-۲,۰)\ ,\ B-A=B=[۱,+\infty)$

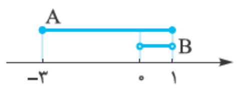
پ)



$A\cup B=A=(-۲,۲)\ ,\ A\cap B=B=[-۱,۱]$

$A-B=(-۲,-۱)\cup(۱,۲)\ ,\ B-A=\varnothing$

ت)

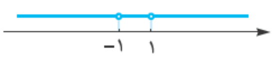


$A\cup B=A=[-۳,۱]\ ,\ A\cap B=B=(۰,۱)$

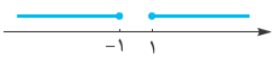
$A-B=[-۳,۰]\cup\{۱\}\ ,\ B-A=\varnothing$

۶-

$\mathbb{R}-\{۰\}=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$



$\mathbb{R}-\{-۱,۱\}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,۱)\cup(۱,+\infty)$



$\mathbb{R}-(-۱,۱)=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

از کل $\mathbb{R}$ بازه‌ی $(-۱,۱)$ را حذف می‌کنیم. چون بازه، باز است، ۱ و ۱- حذف نمی‌شوند.

۷- الف) نامتناهی   ب) متناهی   پ) نامتناهی   ت) نامتناهی

ث) نامتناهی   ج) متناهی (برابر $\varnothing$ است)   چ) متناهی   ح) نامتناهی ($\{۴,۵,۶,\dots\}$)

خ) نامتناهی   د) متناهی

۸- الف) $A=\{\dots,-۲,-۱,۰\}\ ,\ B=\{۰,۱,۲,\dots\}\Rightarrow A\bigcap B=\{۰\}$

ب) $A=\mathbb{N}\ ,\ B=\mathbb{Z}\Rightarrow A-B=\varnothing\ ,\ B-A=\{\cdots,-۲,-۱,۰\}$

۹- الف) درست

ب) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌تواند متناهی هم باشد (*مثل الف مسئله‌ی قبلی*)، پس نادرست است.

پ) وقتی مجموعه‌ی بزرگ‌تر (یعنی B) متناهی باشد، زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی هستند، پس درست است.

ت) B همه‌ی اعضای A را هم دارد، چون A نامتناهی است، پس B هم نامتناهی می‌شود، پس درست است.

ث) ممکن است B نامتناهی هم باشد (*الف سؤال ۸ رو ببین*)، پس نادرست است.

ج) ممکن است B نامتناهی باشد ولی $B-A$ متناهی شود، پس نادرست است. (*سعی کن برای خودت مثال بزنی.*)

۱۰-

الف) $A'=U-A=\{-۵,-۴,\dots,۵\}-\{۰,۱,۲\}=\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۳,۴,۵\}$

ب) $A'=U-A=\mathbb{Z}-\{۰,۱,۲\}=\{\dots,-۲,-۱,۳,۴,۵,\dots\}$

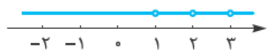
پ) $A'=U-A=[۰,۲]-\{۰,۱,۲\}=(۰,۱)\bigcup(۱,۲)$

ت) $A'=U-A=(-۱,۴]-\{۰,۱,۲\}=(-۱,۰)\bigcup(۰,۱)\bigcup(۱,۲)\bigcup(۲,۴]$

ث) $A'=U-A=\mathbb{R}-\{۰,۱,۲\}=(-\infty,۰)\bigcup(۰,۱)\bigcup(۱,۲)\bigcup(۲,+\infty)$

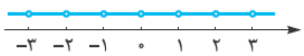
۱۱-

$\mathbb{N}'=U-\mathbb{N}=\mathbb{R}-\mathbb{N}=(-\infty,۱)\bigcup(۱,۲)\bigcup(۲,۳)\bigcup\dots$



$\mathbb{W}'=U-\mathbb{W}=\mathbb{R}-\mathbb{W}=(-\infty,۰)\bigcup(۰,۱)\bigcup(۱,۲)\bigcup\dots$

$\mathbb{Z}'=U-\mathbb{Z}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\cdots\bigcup(-۲,-۱)\bigcup(-۱,۰)\bigcup(۰,۱)\bigcup(۱,۲)\bigcup\dots$



$\mathbb{Q}'=U-\mathbb{Q}=\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'\quad,\quad(\mathbb{Q}')'=U-\mathbb{Q}'=\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

۱۲- با استفاده از نمودار ون در پله‌ی اول درمی‌یابیم که:

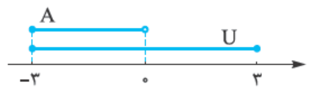
الف) U   ب) $\varnothing$ پ) U (چون $A\subseteq U$)

ت) A (چون $A\subseteq U$)   ث) A' ج) $\varnothing$ (*چون هرچی تو A هست تو U هست*)

چ) $\varnothing'=U-\varnothing=U$ ح) $U'=U-U=\varnothing$

۱۳-

$A=[-۳,۰)$



$A'=U-A=[۰,۳]$

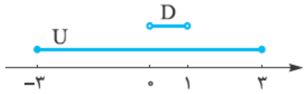
$B=(-۳,۱)$

$B'=U-B=\{-۳\}\bigcup[۱,۳]$

$C=(-۳,۳)$

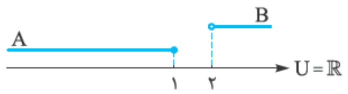
$C'=U-C=\{-۳,۳\}$ (*فقط دوتا عدد می‌شه*)

$D=(۰,۱)$



$D'=U-D=[-۳,۰]\bigcup[۱,۳]$

۱۴-



$A'=(۱,+\infty)\ ,\ B'=(-\infty,۲]$

$A'\cap B'=(۱,+\infty)\cap(-\infty,۲]=(۱,۲]$ (اول A' و B' بعد اشتراک اون‌ها)

$(A\cap B)'=(\varnothing)'=\mathbb{R}-\varnothing=\mathbb{R}$ (اول $A\cap B$ بعد متمم)

$A-B=A \Rightarrow (A-B)'=A'=(۱,+\infty)$

۱۵- $A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ و $B=\{۳,۶,۹\}$. توجه دارید که B و A باید زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع باشند.

نتیجه	$(A')'$	A'	A
$(A')'=A$	$\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$	$\{۱,۳,۵,۷,۹\}$	$\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

نتیجه	$A'\cap B'$	$(A\cup B)'$	$A\cup B$	B'	A'
$(A\cup B)'=A'\cap B'$	$\{۱,۵,۷\}$	$\{۱,۵,۷\}$	$\{۲,۳,۴,۶,۸,۹,۱۰\}$	$\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰\}$	$\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

نتیجه	$A'\cup B'$	$(A\cap B)'$	$A\cap B$	B'	A'
$(A\cap B)'=A'\cup B'$	$\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۸,۹,۱۰\}$	$\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۸,۹,۱۰\}$	$\{۶\}$	$\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰\}$	$\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

نتیجه	$A-(A\cap B)$	$A\cap B'$	$A-B$	B'
$A-B=A\cap B'=A-(A\cap B)$	$\{۲,۴,۸,۱۰\}$	$\{۲,۴,۸,۱۰\}$	$\{۲,۴,۸,۱۰\}$	$\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰\}$

۱۶-

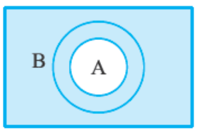
$$\left.\begin{array}{l} B\cup C=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\} \Rightarrow A-(B\cup C)=\varnothing \\ B'=\{\dots,-۳,-۲,-۱\}\ ,\ C'=\mathbb{Z}-\{-۲,-۱,۰,۱\}=\{\dots,-۴,-۳,۲,۳,۴,\dots\} \\ A\cap B'\cap C'=\mathbb{N}\cap\{\dots,-۳,-۲,-۱\}\cap\{\dots,-۴,-۳,۲,۳,۴,\dots\}=\varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow$$ سمت چپ = سمت راست = $\varnothing$

۱۷- الف) بستگی به مجموعه‌ی مرجع دارد. اگر U نامتناهی باشد، متمم مجموعه‌ی متناهی، نامتناهی می‌شود، اما اگر U متناهی باشد، متمم مجموعه‌ی متناهی، متناهی است، پس در حالت کلی نادرست است.

ب) با توجه به توضیحات الف درست است.

پ) نادرست است. ممکن است A و A' هر دو نامتناهی باشند. مثلاً اگر $U=\mathbb{Z}$ و $A=\mathbb{N}$ باشد، A' هم نامتناهی است.

ت) در نمودار ون مقابل، $A\subseteq B$ است. A' شامل مجموعه‌ی B' است، پس $B'\subseteq A'$ درست خواهد بود.



۱۸- الف) $U=\mathbb{Z}$ ب) $U=\mathbb{N}$ پ) $U=\mathbb{W}$ ت) $U=\mathbb{R}$

۱۹-

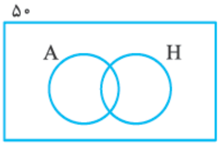
$n(A)=۵+۳=۸$ $n(B)=۳+۱۲=۱۵$ $n(A\cup B)=۵+۳+۱۲=۲۰$

$n(B-A)=۱۲$ $n(A-B)=۵$ $n((A\cup B)')=۳۰-(۵+۳+۱۲)=۱۰$

$n((A-B)\cup(B-A))=۵+۱۲=۱۷$ $n(B')=۳۰-\overbrace{(۳+۱۲)}^{n(B)}=۱۵$ $n(A\cap B')=n(A-B)=۵$

$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=۱۰$ $n(A'\cap B)=n(B-A)=۱۲$ $n(A')=۳۰-\underbrace{(۵+۳)}_{n(A)}=۲۲$

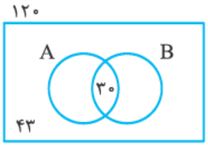
۵۰



۲۰- الف) $\underbrace{n(A\cup H)}_{\text{دارای ABS یا هیدرولیک}}=n(A)+n(H)-n(A\cap H)=۱۷+۳۰-۶=۴۱$

ب) ماشین‌هایی که نه ترمز ABS و نه فرمان هیدرولیک دارند $=n((A\cup H)')=n(U)-n(A\cup H)=۵۰-۴۱=۹$

۱۲۰



۲۱- $۱۲۰-۴۳=۷۷$ عضو شبکه‌ی A یا شبکه‌ی B هستند.

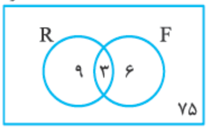
$\Rightarrow \underbrace{n(A\cup B)}_{۷۷}=\underbrace{n(A)}_{۷۰}+n(B)-\underbrace{n(A\cap B)}_{۳۰} \Rightarrow n(B)=۳۷$

-۲۲

$n(R)=۱۲\ ,\ n(F)=۹\ ,\ n(R\cap F)=۳\ \Rightarrow\ n(R\cup F)=\overbrace{n(R)}^{۱۲}+\overbrace{n(F)}^{۹}-\overbrace{n(R\cap F)}^{۳}=۱۸$

الف) بنابراین ۱۸ نفر عضو حداقل یکی از تیم‌ها هستند. ۷۵ نفر هم عضو هیچ تیمی نیستند، پس $۹۳=۱۸+۷۵$ نفر، تعداد دانش‌آموزان این مدرسه خواهد بود.

۹۳ نفر



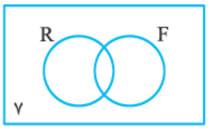
ب) $n\ (\text{فقط ریاضی})=n(R-F)=n(R)-n(R\cap F)=۱۲-۳=۹$

پ) $n\ (\text{فقط فیزیک})=n(F-R)=n(F)-n(F\cap R)=۹-۳=۶$

ت) $۹+۶=۱۵$ نفر، عضوِ فقط یکی از تیم‌ها هستند.

ث) $n(R')=n(U)-n(R)=۹۳-۱۲=۸۱$

-۲۳



$R=$ قبولی‌های ریاضی و $F=$ قبولی‌های فیزیک

حداقل در یکی از دو درس قبول شده‌اند. $=n(R\cup F)=۲۴=۳۱-۷$

$\underbrace{n(R\cup F)}_{۲۴}=\underbrace{n(R)}_{۲۰}+\underbrace{n(F)}_{۱۳}-n(R\cap F)\ \Rightarrow\ n(R\cap F)=۹$

-۲۴

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\ \Rightarrow\ n(A\cup B)=۱۲+۸-۳=۱۷$

$n(A'\cap B)=n(B\cap A')=n(B-A)=n(B)-n(B\cap A)=۸-۳=۵$

$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۱۲-۳=۹$

-۲۵

$n(A')=۲۳\ \Rightarrow\ \overbrace{n(U)}^{۱۰۰}-n(A)=۲۳\ \Rightarrow\ n(A)=۷۷$

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\ \Rightarrow\ ۴۵=۷۷-n(A\cap B)\ \Rightarrow\ n(A\cap B)=۳۲$

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۷+۳۲-۳۲=۷۷$

$n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۷۷-۳۲=۴۵$

$n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۷۷=۲۳$

-۲۶

تعداد پاره‌خط‌ها: $a_1=۳, a_2=۳\times۲, a_3=۳\times۳\ \ldots\ \Rightarrow\ a_n=۳n$ خطی

تعداد مربع‌ها: $a_1=۱\ ,\ a_2=۲\times۱=۲\ ,\ a_3=۲\times۲=۴=۲^۲\ ,\ a_4=۲\times۲^۲=۲^۳\ ,\ldots\ \Rightarrow\ a_n=۲^{n-1}$ غیرخطی

تعداد چوب‌کبریت‌ها: $a_1=۳\ ,\ a_2=۳+۲(۱)=۵\ ,\ a_3=۳+۲(۲)\ ,\ a_4=۳+۳(۲),\ldots\ \Rightarrow\ a_n=\underbrace{۳+(n-۱)(۲)}_{۲n+۱}$ خطی

تعداد مربع‌های رنگی: $a_1=۲^۲, a_2=۳^۲-۱^۲, a_3=۴^۲-۲^۲,\ldots\ \Rightarrow\ a_n=(n+۱)^۲-(n-۱)^۲=۴n$ خطی

تعداد آجرها: $a_1=۱\ ,\ a_2=۱+۲\ ,\ a_3=۱+۲+۳\ ,\ a_4=۱+۲+۳+۴,\ldots\ \Rightarrow\ a_n=۱+۲+۳+\cdots+n=\dfrac{n(n+۱)}{۲}$ غیرخطی

تعداد مهره‌ها: $a_1=۱+۴(۱)\ ,\ a_2=۴+۴(۲)\ ,\ a_3=۹+۴(۳),\ldots\ \Rightarrow\ a_n=n^۲+۴(n)$ غیرخطی

-۲۷

$c_n=an+b\ \Rightarrow\ \begin{cases} c_4=۱۷\ \Rightarrow\ ۴a+b=۱۷\\ c_{10}=۳۵\ \Rightarrow\ ۱۰a+b=۳۵\end{cases}\ \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم.}}\ ۶a=۱۸\ \Rightarrow\ a=۳\ \Rightarrow\ b=۵$

$\Rightarrow\ c_n=۳n+۵\ \Rightarrow\ c_{20}=۳(۲۰)+۵=۶۵$

-۲۸ الف)

$\left.\begin{array}{l} n=۱\ \Rightarrow\ a_2-a_1=۷\ \Rightarrow\ a_2=a_1+۷=-۱+۷=۶\\ n=۲\ \Rightarrow\ a_3-a_2=۷\ \Rightarrow\ a_3=a_2+۷=۶+۷=۱۳\\ n=۳\ \Rightarrow\ a_4-a_3=۷\ \Rightarrow\ a_4=a_3+۷=۱۳+۷=۲۰\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ -۱\ \xrightarrow{+۷}\ ۶\ \xrightarrow{+۷}\ ۱۳\ \xrightarrow{+۷}\ ۲۰,\ldots$

در درس بعد چنین دنباله‌های خطی را دنباله‌ی حسابی می‌نامیم. شکل بازگشتی دنباله‌های حسابی، به صورت $a_{n+1}-a_n=d$ است که d عدد ثابتی است.

ب)

$\left.\begin{array}{l} n=۱\ \Rightarrow\ b_2=۳b_1=۳\times۲\\ n=۲\ \Rightarrow\ b_3=۳b_2=۳\times۳\times۲=۲\times۳^۲\\ n=۳\ \Rightarrow\ b_4=۳b_3=۳\times۲\times۳^۲=۲\times۳^۳\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ ۲\ \xrightarrow{\times۳}\ ۶\ \xrightarrow{\times۳}\ ۱۸\ \xrightarrow{\times۳}\ ۵۴,\ldots$

در درس بعدی چنین دنباله‌هایی را دنباله‌ی هندسی می‌نامیم.

پ)
$$\left.\begin{array}{l} n=۱ \Rightarrow c_۳=c_۲+c_۱=۱+۱=۲ \\ n=۲ \Rightarrow c_۴=c_۳+c_۲=۲+۱=۳ \\ n=۳ \Rightarrow c_۵=c_۴+c_۳=۳+۲=۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,\dots$$

هر جمله، جمع دو جمله‌ی قبلی است. این دنباله، دنباله‌ی فیبوناتچی نامیده می‌شود.

۲۹- با توجه به پله‌ی چهارم می‌دانیم $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$.

$$۲+۴+۶+\cdots+۲n=۲(۱+۲+۳+\cdots+n)=۲\times\frac{n(n+۱)}{۲}=n(n+۱)$$

۳۰- الف) $\frac{۱}{۳}=۱-\frac{۴}{۳}, \frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}-\frac{۵}{۳},\dots$، پس هر جمله با $\frac{۱}{۳}$ جمع شده و جمله‌ی بعدی به دست می‌آید. دنباله حسابی است و $d=\frac{۱}{۳}$. جمله‌ی عمومی دنباله می‌شود:

$$t_n=a+(n-۱)d \Rightarrow t_n=۱+(n-۱)(\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}n+\frac{۲}{۳}$$

ب) هر جمله با ۳- جمع شده و جمله‌ی بعدی به دست می‌آید، پس دنباله حسابی بوده و $d=-۳$ جمله‌ی عمومی آن برابر است با:

$$t_n=a+(n-۱)d \Rightarrow t_n=-۴+(n-۱)(-۳)=-۳n-۱$$

پ) $\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۲}=\frac{-۴}{۱۰}, \frac{۱}{۵۰}-\frac{۱}{۱۰}=\frac{-۴}{۵۰},\dots$ پس اختلاف هر دو جمله، ثابت نبوده و دنباله حسابی نیست.

$$\frac{۱}{۲} \xrightarrow{-\frac{۴}{۱۰}} \frac{۱}{۱۰} \xrightarrow{-\frac{۴}{۵۰}} \frac{۱}{۵۰},\dots$$

ت) هر جمله با عدد ثابت a جمع شده و جمله‌ی بعدی به دست می‌آید، پس $d=a$. جمله‌ی عمومی: $t_n=a+(n-۱)d=a+(n-۱)(a)=an$

ث) جمله‌ی عمومی دنباله‌های حسابی به صورت خطی است. ضریب n همان قدرنسبت دنباله است، پس دنباله‌ی $a_n=\frac{n}{۲}-۱$ حسابی بوده و $d=\frac{۱}{۲}$.
با امتحان چند جمله نیز درمی‌یابیم که:

$$-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{+\frac{۱}{۲}} ۰ \xrightarrow{+\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲} \xrightarrow{+\frac{۱}{۲}} ۱,\dots$$

ج) چون دنباله به صورت خطی نیست (درجه نسبت n برابر ۲)، پس دنباله‌ی داده‌شده حسابی نیست. با امتحان چند جمله نیز درمی‌یابیم، دنباله حسابی نیست.
$b_۱=۳,\ b_۲=۹,\ b_۳=۱۷ \Rightarrow ۳,۹,۱۷,\dots$

۳۱- $t_n=a+(n-۱)d \Rightarrow t_n=-۳+(n-۱)(۵)=۵n-۸ \Rightarrow ۵n-۸=۵۷ \Rightarrow n=۱۳$ جمله‌ی سیزدهم

۳۲- $t_n=a+(n-۱)d \Rightarrow t_n=۵+(n-۱)(۷)=۷n-۲ \Rightarrow ۷n-۲=۱۵۲ \Rightarrow n=۲۲$ جمله‌ی بیست و دوم

۳۳-
$$\begin{cases} t_۲=-۲ \Rightarrow a+d=-۲ \\ t_۵=\frac{۵}{۲} \Rightarrow a+۴d=\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-d=۲ \\ a+۴d=\frac{۵}{۲} \end{cases}$$
$$۳d=\frac{۹}{۲} \Rightarrow d=\frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۷}{۲} \xleftarrow{-\frac{۳}{۲}} -۲ \xrightarrow{+\frac{۳}{۲}} -\frac{۱}{۲} \xrightarrow{+\frac{۳}{۲}} ۱ \xrightarrow{+\frac{۳}{۲}} \frac{۵}{۲}$$

۳۴- $t_۱=-۵,\ t_۲=۲,\ t_۳=۹ \Rightarrow -۵ \xrightarrow{+۷} ۲ \xrightarrow{+۷} ۹,\dots \Rightarrow d=۷$

نکته دنباله‌های خطی، دنباله‌ی حسابی هستند. ضریب n، همان قدرنسبت دنباله است.

۳۵- جمله‌ی عمومی دنباله‌های حسابی به صورت خطی است. به عبارت دیگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی، یک چندجمله‌ای درجه‌اول برحسب n است. باید کاری کنیم تا $n^۲$ از بین برود، پس $a-۲=۰$ و لذا $a=۲$ است. جمله‌ی عمومی $t_n=۲n-۳$ است. حالا $t_{۱۰}=۲(۱۰)-۳=۱۷$.

۳۶-
$$\begin{cases} t_۷=۱۶ \Rightarrow a+۶d=۱۶ \\ t_{۱۱}=۲۸ \Rightarrow a+۱۰d=۲۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-۶d=-۱۶ \\ a+۱۰d=۲۸ \end{cases} \Rightarrow -۲ \xrightarrow{+۳} ۱ \xrightarrow{+۳} ۴ \xrightarrow{+۳} ۷,\dots$$
$$۴d=۱۲ \Rightarrow d=۳ \Rightarrow a=-۲$$

۳۷- الف)
$$\begin{cases} t_۴=۲ \Rightarrow a+۳d=۲ \\ t_۷=۵ \Rightarrow a+۶d=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a-۳d=-۲ \\ a+۶d=۵ \end{cases} \Rightarrow -۱,۰,۱,۲,\dots$$
$$۳d=۳ \Rightarrow d=۱ \Rightarrow a=-۱$$

ب) مجموع پنج جمله‌ی اول $=t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵=-۱+۰+۱+۲+۳=۵$

پ) مجموع پنج جمله‌ی دوم $=t_۶+t_۷+t_۸+t_۹+t_{۱۰}=۴+۵+۶+۷+۸=۳۰$

ت) مجموع پنج جمله‌ی دوم $=t_۶+t_۷+t_۸+t_۹+t_{۱۰}=(a+۵d)+(a+۶d)+(a+۷d)+(a+۸d)+(a+۹d)=۵a+۳۵d$